Introduzione all'Analisi Non-Standard

Riccardo Dossena

La matematica del seicento venne caratterizzata fondamentalmente dalla ricerca della soluzione ad un celebre e antico problema: il cosiddetto *"problema delle tangenti"*. Esso consiste, come facilmente si può intuire, nella determinazione della retta tangente al grafico di una data funzione reale di variabile reale in ogni suo punto. A questo si aggiunse in modo naturale l'esigenza della risoluzione del problema inverso: data una relazione fra la tangente ed il punto risalire al grafico della funzione.

Queste ed altre questioni di minor rilievo portarono alla nascita di una nuova disciplina matematica chiamata calcolo differenziale o più familiarmente Analisi Matematica, i cui fondatori furono essenzialmente Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, i quali tra l'altro si rivolsero a vicenda non poche accuse di plagio a proposito dell'assoluta priorità sull'invenzione del metodo. Oggi si tende a ripartire equamente tra i due i meriti delle scoperte che in ogni caso non mancarono di avere i loro detrattori. In effetti qualcosa non funzionava: c'era qualcosa di misterioso che sfuggiva o più semplicemente qualcosa di cui non si riusciva a dare una definizione non autocontraddittoria. Era questa la nozione di *infinitesimo* o numero infinitamente piccolo ovvero minore in valore assoluto di qualsiasi altro reale positivo e tuttavia diverso da zero. Eppure questo strano oggetto fu proprio lo strumento che permise lo sviluppo del calcolo differenziale (che possiamo chiamare anche calcolo infinitesimale) e quindi la risoluzione dei problemi citati.

Esaminiamo a grandi linee il metodo infinitesimale per la determinazione delle tangenti: data una funzione reale $y = f(x)$ ed il suo grafico, consideriamo un generico punto (x, y) appartenente ad esso. Dando un incremento Δx alla variabile indipendente x si ottiene un corrispondente incremento della variabile y che risulta essere $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Il punto del grafico corrispondente a questi due incrementi sarà perciò $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Se tracciamo la retta passante da esso e da (x, y) è facile vedere che in corrispondenza ad un incremento sempre più piccolo della variabile indipendente x, tale retta approssima sempre meglio la retta tangente. Il rapporto $\Delta y/\Delta x$ rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per i nostri due punti ed in particolare rappresenterà una buona approssimazione del coefficiente angolare della retta tangente in corrispondenza a incrementi Δx sempre più piccoli. E fin qui tutto bene. Ma a noi non interessa un'approssimazione, seppur buona, della tangente: noi vogliamo la tangente vera e propria! Ed ora arriva la parte che Leibniz e Newton non riuscirono a rigorizzare, benché producesse risultati corretti. Immaginiamo di mettere sotto un microscopio il grafico della nostra funzione. Ebbene, se ci focalizziamo sul punto (x, y) ci accorgiamo che la curva è *indistinguibile* dalla sua tangente in quel punto. Possiamo allora pensare che il nostro grafico sia costituito da tanti piccoli tratti rettilinei e diciamo che per tratti infinitesimi la curva si può considerare diritta. Ma qual è il significato preciso della parola "infinitesimi"? Teniamo per il momento questo concetto come intuitivo. Supponiamo di dare un incremento infinitesimo dx alla variabile indipendente x (scriviamo dx al posto di Δx per indicare, appunto, un incremento infinitesimo). La variabile dipendente verrà incrementata di una quantità anch'essa infinitesima $dy = f(x + dx) - f(x)$ e dunque, in accordo con quanto detto, dato che per tratti infinitamente piccoli la curva "coincide" con la tangente, la retta passante per i punti (x, y) e $(x+dx, y+dy)$ è proprio la tangente cercata ed il rapporto dy/dx rappresenta il suo coefficiente angolare[1].

Si noti che il cambiamento di Δ in d sta ad indicare semplicemente incrementi infinitesimi, cioè vale l'uguaglianza

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad \text{se } \Delta x = dx \text{ è infinitesimo.}$$

Facciamo ora un esempio per fissare le idee. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ ed il punto del suo grafico di ascissa x_0 e diamo un incremento dx (infinitesimo) alla variabile indipendente. Assumendo l'ipotesi per la verità un po' vaga di Leibniz secondo la quale gli infinitesimi obbedirebbero alle regole elementari dell'aritmetica dei numeri reali, si ha:

$$\begin{aligned} dy &= f(x_0 + dx) - f(x_0) = (x_0 + dx)^2 - x_0^2 = \\ &= x_0^2 + dx^2 + 2x_0 dx - x_0^2 = dx^2 + 2x_0 dx \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2 + 2x_0 dx}{dx} = 2x_0 + dx.$$

A questo punto il procedimento di Leibniz e Newton consiste nel far letteralmente scomparire ogni termine infinitesimo, ottenendo cioè

$$\frac{dy}{dx} = 2x_0.$$

Questo risultato è corretto (una dimostrazione alternativa viene riportata in un'appendice finale), ma non è difficile trovare delle critiche al procedimento svolto per ottenerlo:

1. quali sono le regole elementari cui gli infinitesimi obbediscono?
2. secondo quale criterio si è potuto eliminare il termine dx?

Tralasciando in ogni caso il problema fondamentale: che cosa sono gli infinitesimi?

Prima di tentare di dare una risposta a queste domande introduciamo un po' di terminologia. Data una funzione reale $y = f(x)$ ed un generico punto del suo dominio x_0, il rapporto dy/dx si chiama *derivata* della funzione $y = f(x)$ nel punto x_0 e viene talvolta indicato con $(dy/dx)_{x=x_0}$ per mettere in evidenza il suo legame col punto x_0 (ricordiamo che esso rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel suo punto di ascissa x_0). La funzione che associa ad ogni punto x del dominio di f la derivata in x si chiama semplicemente derivata di $y = f(x)$ e si denota con $y' = f'(x)$. Introduciamo ora una nuova funzione df dipendente da due variabili reali x e dx definita da $df(x, dx) = f'(x)dx$. Fissati x e dx, il valore di questa nuova funzione reale rappresenta l'incremento

[1]Dato un punto e il valore di un coefficiente angolare esiste ed è unica la retta per quel punto che ha quel coefficiente angolare. Dunque il rapporto dy/dx consentirebbe di determinare *univocamente* la retta tangente.

dal punto $(x, f(x))$ lungo la retta tangente in corrispondenza ad un incremento dx (reale) della variabile indipendente. Riprendendo il discorso infinitesimale e supponendo dx infinitesimo, l'incremento lungo la retta tangente e quello lungo il grafico coincidono e possiamo scrivere

$$dy = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$$

e dividendo per dx

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ritroviamo la nostra notazione per la derivata.

La variabile dipendente dy si chiama *differenziale di* f (o di y), mentre la variabile indipendente dx si chiama *differenziale di* x. Per Leibniz il differenziale dy era semplicemente l'incremento infinitesimo che subiva la variabile y in corrispondenza ad un incremento infinitesimo dx.

Riprendiamo ora la nostra (o meglio quella di Leibniz) definizione di derivata:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = f'(x) \quad \text{con } dx \text{ infinitesimo.}$$

Ora, se $dy = f'(x)dx$ rappresenta l'incremento infinitesimo della variabile y, la somma di tutti questi incrementi ricostituirà la y. Tale somma venne indicata da Leibniz con una S allungata:

$$y = \int dy$$

e sostituendo l'espressione di dy

$$y = \int f'(x)dx = f(x).$$

Questa operazione si chiama *integrazione* e risulta essere l'operazione inversa della derivazione (o meglio della differenziazione). Nel nostro esempio:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x \Rightarrow y = \int f'(x)dx = x^2.$$

Questo è il punto di partenza per la risoluzione del problema inverso delle tangenti.

Nel 1734 venne pubblicata una spietata critica al metodo infinitesimale di Newton e Leibniz dal vescovo Bishop George Berkeley il quale sosteneva, a ragione, la contraddittorietà della nozione di infinitesimo. In effetti, come può un numero essere più piccolo in valore assoluto di qualsiasi altro numero positivo e tuttavia essere diverso da zero? Il campo dei numeri reali deve soddisfare infatti la seguente proprietà, detta di Archimede:

per ogni numero reale positivo a esiste un numero naturale n tale che $\frac{1}{n} < a$.

Questo ci dice che non può esistere nessun numero reale positivo che sia più piccolo di ogni altro numero reale positivo ($1/n$ è un numero reale). Ciò sancisce la caduta degli infinitesimi e di tutto il ragionamento che ci ha portato alla definizione di derivata: se dx non è zero, allora è diverso da zero e nell'esempio considerato non abbiamo il diritto di eliminarlo impunemente. Se è zero il rapporto dy/dx assume il valore $0/0$

che è un'espressione priva di significato. Scrisse Berkeley: *"Una volta ammesso che gli incrementi scompaiono, cioè che gli incrementi siano nulli o che non vi siano incrementi, cade la precedente ipotesi che gli incrementi fossero qualcosa, o che vi fossero incrementi, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi, cioè un'espressione ottenuta mediante essa."*

Tuttavia, i matematici persistettero nell'uso del metodo infinitesimale per un altro secolo con grandi risultati, così come fisici e ingegneri. Tuttora, nell'introdurre le nozioni elementari dell'Analisi Matematica, si è soliti ricorrere informalmente all'uso degli infinitesimi in quanto essi hanno il pregio di essere molto vicini all'intuizione.

Quando nel XIX secolo si presentò una forte esigenza di rigore matematico, il calcolo differenziale venne completamente riformulato da Karl Weierstrass, tra il 1870 ed il 1880, introducendo il concetto di limite, il quale permise di operare in termini dei soli numeri reali eliminando una volta per tutte l'uso degli infinitesimi.

Riprendiamo il nostro esempio e ragioniamo come propone Weierstrass. Sia Δx un numero reale qualsiasi e calcoliamo il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Ebbene, vediamo che $2x_0$ è il numero che viene approssimato sempre meglio scegliendo Δx sempre più piccolo (dato che Δx è arbitrario) e diciamo quindi che $2x_0$ è il limite di $\Delta y/\Delta x$ per Δx tendente a zero. In simboli:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0.$$

Risulta allora naturale assumere la seguente come definizione di derivata:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

mantenendo l'antica notazione, dove il cambiamento di Δ in d indica semplicemente un'operazione di passaggio al limite. Nulla da dire riguardo il rigore matematico di questa definizione: gli infinitesimi non vengono neppure sfiorati e siamo giunti al risultato che volevamo senza contraddizioni. Il rapporto $\Delta y/\Delta x$ non è mai privo di significato perché non viene mai posto $\Delta x = 0$.

Facciamo però notare che quella che abbiamo dato sarebbe una definizione accettabile di derivata nel caso in cui avessimo già acquisito il concetto di limite. Altrimenti, la definizione completa sarebbe la seguente:

la derivata di f in x_0 è φ se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste δ (che dipende da ε e da x_0) tale che per ogni $\Delta x \neq 0$ con $|\Delta x| < \delta$ si ha $|\Delta y/\Delta x - \varphi| < \varepsilon$.

L'approccio di Weierstrass è quello "standard" ormai consolidato che viene insegnato oggi nei corsi di Analisi. Tuttavia, pur essendo un metodo rigoroso, come possiamo osservare ad esempio dalla definizione precedente, ha il difetto di farci perdere l'intuizione iniziale che aveva dato il via alla nascita del calcolo infinitesimale e che comunque ci aveva condotto a delle conclusioni corrette. E se i risultati sono corretti, non potrà esserlo in qualche modo anche il procedimento? La risposta a questa domanda è sì.

Nel 1961 il matematico americano di origine tedesca Abraham Robinson trovò un modo per rendere rigoroso il calcolo differenziale usando gli infinitesimi. Questa sua scoperta si fonda in modo essenziale sulla logica matematica, anche se verso la fine degli anni sessanta il matematico americano H. Jerome Keisler[2] è riuscito a riformulare tutta l'Analisi Matematica secondo il principio infinitesimale di Robinson, seguendo una via alternativa che non la utilizza, rendendo questo metodo accessibile addirittura alle matricole universitarie. Robinson battezzò questo "nuovo" calcolo differenziale *Analisi Non-Standard*, in quanto esso si basa appunto su un modello non-standard dei numeri reali. Spieghiamo il significato preciso di queste parole introducendo a tale scopo nozioni di logica matematica.

Un linguaggio formale è un linguaggio con un vocabolario ed un certo numero di regole prefissati. Sono linguaggi formali, ad esempio, i linguaggi di programmazione come il C, il C++, il Fortran, ecc., mentre *non* è un linguaggio formale il linguaggio comune che usiamo quotidianamente, essendo soggetto a regole tutt'altro che stabilite ed in continua evoluzione[3].

Prendiamo come punto di partenza il sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$ che chiameremo *universo standard* ed il calcolo differenziale di Weierstrass (o Analisi Standard). Designamo con L il linguaggio formale in cui parliamo di $\mathbb{R}$ e con K l'insieme di tutte le fbf (formule ben formate o proposizioni) vere di L. Dicendo che $\mathbb{R}$ è un *modello* di K intendiamo che $\mathbb{R}$ è una struttura matematica tale che ogni proposizione di K interpretata come riferentesi a $\mathbb{R}$ è vera.

Una conseguenza di un celebre Teorema di Gödel (che richiameremo fra poco) è l'esistenza di un *universo non-standard* $\mathbb{R}^*$, differente da $\mathbb{R}$, che è pure un modello di K (un modello non-standard, appunto): $\mathbb{R}^*$ è una struttura matematica tale per cui *ogni proposizione di K interpretata come riferentesi a $\mathbb{R}^*$ è vera.* Ad esempio consideriamo la seguente proposizione:

se $a < b$, allora $a + c < b + c$.

Prendendo per buono il fatto che essa è una proposizione dell'insieme K, se viene riferita a $\mathbb{R}$ allora a, b e c sono numeri reali, la relazione $<$ è l'usuale relazione d'ordine stretto e la proposizione risulta vera. Se essa è riferita invece a $\mathbb{R}^*$ gli elementi a, b e c sono oggetti propri di $\mathbb{R}^*$ e con un'opportuna interpretazione di $<$ la proposizione rimane comunque vera.

Un altro fatto interessante è che $\mathbb{R}^*$ risulta essere un campo ordinato più ampio di $\mathbb{R}$ ed inoltre risulta contenere una sotto-struttura esattamente identificabile con $\mathbb{R}$ (isomorfa ad $\mathbb{R}$). Possiamo ancora chiamare $\mathbb{R}$ tale sotto-struttura così come possiamo denotare i suoi elementi con gli usuali nomi dei numeri reali (ad es. l'elemento corrispondente a 5 nella nuova struttura viene chiamato sempre 5) e continuare a lavorare con essa come se fosse proprio l'antico $\mathbb{R}$. Possiamo dunque affermare che $\mathbb{R}^*$ contiene $\mathbb{R}$ e in più altri oggetti fra cui, guarda caso, i famosi infinitesimi. $\mathbb{R}^*$ viene chiamato sistema dei *numeri iperreali* e su di esso si fonda l'Analisi Non-Standard. I numeri iperreali, come aveva vagamente supposto Leibniz, godono delle stesse proprietà formali dei numeri reali (o numeri standard) o meglio godono delle stesse proprietà che possono essere espresse nel linguaggio formale L. Un numero iperreale infinitesimo è un numero minore in valore

[2]Cfr. [5] e [6].

[3]Per ulteriori approfondimenti sui linguaggi formali cfr. [7] e [8].

assoluto di qualsiasi altro numero reale positivo e tuttavia diverso da zero: è un numero non-archimedeo (non soddisfa la Proprietà di Archimede). Allora la proprietà archimedea non è sicuramente esprimibile nel linguaggio formale L e non può essere trasferita a tutti gli oggetti di $\mathbb{R}^*$.

L'esistenza di "strani" numeri non contemplati dall'aritmetica usuale fu scoperta per la prima volta nel 1934 dal logico norvegese Thoralf A. Skolem che costruì un modello non-standard dei numeri naturali. Successivamente questa costruzione fu ampliata fino ad arrivare al campo dei numeri iperreali. Il termine "iperreale" è dovuto ad Edwin Hewitt in un articolo del 1948.

La geniale intuizione di Robinson fu quella di utilizzare gli infinitesimi per riformulare l'Analisi Matematica. Ripercorriamo questa ricostruzione partendo dal Teorema di completezza di Gödel:

Teorema di completezza

Un insieme di proposizioni è logicamente coerente (nessuna contraddizione può essere dedotta da esso) se e solo se esso ha un modello, cioè se e solo se esiste un universo in cui esse sono tutte vere.

Accanto al Teorema di completezza abbiamo l'importante corollario dovuto a Malcev-Henkin:

Teorema di compattezza

Sia P un insieme di proposizioni di un linguaggio formale L. Supponiamo che nell'universo standard ogni sottoinsieme finito di P sia vero. Allora esiste un universo non-standard in cui tutte le proposizioni di P sono contemporaneamente vere.

Il teorema di compattezza è una diretta conseguenza del teorema di completezza: dato che non possiamo dedurre contraddizioni da P in quanto ogni deduzione può far uso solo di un numero finito di premesse (cioè di elementi di P) e dato che ogni sottoinsieme finito di P, in quanto vero, è logicamente coerente, l'intera collezione di proposizioni è logicamente coerente e dal teorema di completezza esiste un universo (non-standard) in cui tutte le proposizioni sono simultaneamente vere.

A questo punto siamo pronti per dimostrare l'esistenza degli infinitesimi. Consideriamo il seguente insieme di proposizioni:

- *c è un numero maggiore di zero e minore di* $\dfrac{1}{2}$
- *c è un numero maggiore di zero e minore di* $\dfrac{1}{3}$
- ...
- *c è un numero maggiore di zero e minore di* $\dfrac{1}{n}$
- ...

Ognuna di queste proposizioni è esprimibile nel linguaggio formale L e se riferita all'universo standard $\mathbb{R}$ si ha evidentemente che ogni sottoinsieme finito di questa collezione è vero. In effetti, dato un qualunque numero nella forma $1/n$ con n naturale, il numero $1/2n$ è maggiore di zero e minore di $1/n$ (ricordiamo che queste proposizioni non possono essere tutte contemporaneamente vere nell'universo standard per la Proprietà di Archimede). Dal teorema di compattezza deduciamo che esiste un universo non-standard $\mathbb{R}^*$ in cui tutte le proposizioni sono simultaneamente vere, dunque esiste una struttura $\mathbb{R}^*$ che contiene un numero c maggiore di zero e minore di $1/n$ *qualunque sia* n. Risulta allora naturale dare la seguente

Definizione

Un numero $c \in \mathbb{R}^*$ è infinitesimo se $|c| < 1/n$ per ogni numero naturale n.

Osserviamo che secondo questa definizione 0 è infinitesimo. Tuttavia esso è l'unico numero reale infinitesimo e d'altronde abbiamo già dimostrato l'esistenza di almeno un infinitesimo diverso da zero.

Dato dunque un infinitesimo c diverso da zero possiamo costruire tanti altri numeri iperreali non reali, quali ad esempio $c + c$, $1 + c$, $4c$, $1/c$, ecc. In particolare $c + c$ e $4c$ sono ancora infinitesimi, mentre il numero $1/c$ appartiene ad un'altra categoria di numeri iperreali: è un numero *infinito* e risulta essere maggiore di qualsiasi numero naturale. I numeri iperreali che sono minori di qualche n naturale vengono detti *finiti* (i numeri reali e gli infinitesimi sono finiti).

Giova a questo punto introdurre il seguente concetto:

Definizione

Due numeri iperreali x e y si dicono infinitamente vicini (o appartenenti alla stessa monade) se la loro differenza è infinitesima e si scrive $x \approx y$.

Ad esempio, se c è infinitesimo, 2 e $2+c$ sono infinitamente vicini in quanto $(2+c)-2 = c$ è infinitesimo ed allo stesso modo c è infinitamente vicino a 0. Banalmente $3 \approx 3$ dato che $3 - 3 = 0$ è infinitesimo. Di importanza fondamentale è il seguente risultato:

Teorema della parte standard

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad esattamente un numero reale.

Dunque un infinitesimo c è infinitamente vicino al solo numero reale 0 e $2 + c$ è infinitamente vicino a 2 e a nessun altro numero reale. Dato x iperreale finito, l'unico numero reale cui x è infinitamente vicino si chiama *parte standard di x* e viene denotato con $\mathrm{st}(x)$.

Un altro concetto di fondamentale importanza è il seguente: data una funzione reale f esiste una corrispondente funzione iperreale f^* (il cui dominio e codominio sono cioè sottoinsiemi di $\mathbb{R}^*$) chiamata *estensione naturale di f* che gode delle seguenti “naturali” proprietà:

1. se r è un numero reale e $f(r)$ è definita, allora $f^*(r) = f(r)$;
2. se r è un numero reale e $f(r)$ non è definita, allora $f^*(r)$ non è definita;
3. se f è data da una certa regola, allora f^* è data dalla stessa regola applicata ai numeri iperreali.

Ad esempio se f è definita dalla regola $f(x) = \sqrt{x}$, dove x varia nell'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 0, la sua estensione naturale è $f^*(x) = \sqrt{x}$, dove x varia nell'insieme dei numeri iperreali maggiori o uguali a 0.

Lavorare con una funzione o con la sua estensione naturale è, come si può facilmente intuire, praticamente la stessa cosa: ciò ci consente di alleggerire la notazione eliminando l'asterisco (scrivendo cioè sempre f al posto di f^*) e soprattutto ci dà la possibilità di trattare f^* come se fosse effettivamente la funzione reale f. L'estensione naturale ci permette ad esempio di giustificare scritture del tipo $f(3+c)$ quando c è infinitesimo.

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per rigorizzare finalmente il metodo infinitesimale di Leibniz e Newton, cominciando dal tanto contestato concetto di derivata.

Definizione

Sia f una funzione reale di una variabile reale e x_0 un punto del suo dominio. La derivata di f in x_0 è φ se

$$\varphi = \mathrm{st}\left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

per ogni infinitesimo $\Delta x \neq 0$.

La derivata non è più il rapporto $\Delta y/\Delta x$ con Δx infinitesimo, bensì la parte standard di tale rapporto: una lieve ma essenziale modifica della definizione di Leibniz che ci permette di giungere ai risultati sperati evitando ogni contraddizione, pur rimanendo ispirati all'antico metodo infinitesimale.

Riprendiamo il nostro esempio dal punto in cui ci eravamo bloccati, cioè

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2 + 2x_0dx}{dx} = 2x_0 + dx.$$

Procedendo nel modo suggeritoci da Robinson:

$$\mathrm{st}(2x_0 + dx) = 2x_0$$

che è proprio il risultato che volevamo!

Ora che abbiamo un quadro più ampio della situazione possiamo attualizzare anche le notazioni, le quali risultano lievemente differenti rispetto a quelle antiche. Data una funzione reale f di una variabile reale, un punto x_0 del suo dominio ed un numero iperreale Δx, indichiamo sempre con Δy la quantità $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$; il rapporto $\Delta y/\Delta x$ si chiama *rapporto incrementale*. Denotiamo con dy non più la quantità $f(x_0+dx)-f(x_0)$, bensì $dy = df(x, \Delta x) = f'(x)\Delta x$, dove x e Δx sono numeri iperreali qualunque per i quali tale espressione abbia senso. Per mantenere uniforme la nostra notazione introduciamo il simbolo dx come altro nome per Δx (per una variabile indipendente scrivere dx anziché Δx è la stessa cosa) e scriviamo $dy = df(x, dx) = f'(x)dx$. La variabile dipendente dy si chiama ancora *differenziale di y*, mentre la variabile indipendente dx si chiama *differenziale di x*. Quando $dx \neq 0$ è lecito dividere ambo i membri della precedente equazione per dx ottenendo

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Esaminiamo il rapporto fra $\Delta y/\Delta x$ e dy/dx. Mentre Δx e dx sono uguali, Δy e dy sono diversi: Δy è il cambiamento di y lungo la curva e dy è il cambiamento di y lungo la tangente. Dalla definizione di derivata e da quanto visto finora, si ha l'ovvia relazione

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx} \quad \text{se } \Delta x = dx \text{ è infinitesimo}$$

che sostituisce quella antica

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad \text{se } \Delta x = dx \text{ è infinitesimo.}$$

Anzi, vale addirittura il seguente

Teorema dell'incremento

Sia $y = f(x)$. Supponiamo che $f'(x)$ esista per un certo valore di x e che Δx sia infinitesimo. Allora Δy e dy sono infinitesimi e inoltre

$$\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x$$

per qualche infinitesimo ε che dipende da x e Δx.

Se avessimo a disposizione le regole dell'algebra dei numeri iperreali sarebbe facile dimostrare che $\varepsilon\Delta x$ è un infinitesimo ancora più piccolo di Δx. Dunque se Δx è infinitesimo Δy e dy sono infinitamente vicini e ancora di più: sono talmente vicini da differire per una quantità infinitesima ancora più piccola dello stesso Δx! Questo corrisponde al principio dell'Analisi Standard secondo cui in un punto il differenziale dy di una funzione differisce dall'incremento Δy della stessa per una funzione infinitesima (cioè il cui limite è 0) di ordine superiore rispetto a Δx quando $\Delta x \to 0$ (Δx tende a 0).

L'Analisi Non-Standard è dunque un ben fondato metodo matematico. Essa può essere alternativamente esposta senza utilizzare la logica matematica grazie al lavoro di H. Jerome Keisler, il quale fa uso di un'impostazione assiomatica dei numeri iperreali. Questa trattazione risulta veramente intuitiva e addirittura adeguata ad un corso di Analisi per matricole universitarie.

Tuttora gli studenti sono costretti a imparare questa materia partendo dal concetto di limite, che come abbiamo potuto constatare è di difficile acquisizione. D'altra parte Keisler, nel suo libro di testo *Elementi di Analisi Matematica* [5], pur focalizzandosi interamente sull'approccio infinitesimale, non tralascia il concetto tradizionale di limite giustificandolo con problemi di approssimazione. Questo approccio insegnerebbe dunque anche il metodo standard, rendendo ancora più vantaggiosa questa proposta didattica.

Eppure l'avvento dell'Analisi Non-Standard ha trovato sorprendentemente una reazione negativa da parte soprattutto degli analisti, fedeli al metodo tradizionale di Weierstrass. L'Analisi Non-Standard sta però prendendo piede in settori come la probabilità e la geometria differenziale, date le notevoli semplificazioni che porta. La ricerca in questa direzione va perciò oltre la semplice trattazione che abbiamo dato noi ed è tutt'oggi ad un livello veramente avanzato. Lo stesso Robinson, insieme al suo allievo Allen Bernstein, ha risolto tramite l'Analisi Non-Standard un problema precedentemente insoluto sugli operatori lineari compatti.

Concludiamo citando una frase di Abraham Robinson che è tratta dal suo libro *Non-Standard Analysis* [9] e che solo l'umiltà di una mente geniale come la sua poteva dettare: *"Il fatto che questo libro contenga solo applicazioni alla Matematica Applicata classica è probabilmente una testimonianza delle limitazioni dell'autore e non del metodo."*

APPENDICE

Dimostriamo senza calcolo infinitesimale, come promesso, che dato un punto di ascissa x_0 appartenente al grafico della parabola $y = x^2$, la tangente in tale punto ha coefficiente angolare $2x_0$.

Il punto del grafico in questione è $A \equiv (x_0, x_0^2)$. Data la generica retta $y = mx + q$ imponiamole il passaggio per A. Tale condizione è espressa dall'equazione

$$x_0^2 = mx_0 + q.$$

Imponiamo alla retta di essere tangente alla parabola. Ciò significa "fare sistema" fra le equazioni della retta e della parabola (cioè ricercare le intersezioni fra la retta e la parabola) e porre $\Delta = 0$ (cioè far sì che l'intersezione sia unica):

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + q \end{cases}$$

$$x^2 = mx + q$$

$$x^2 - mx - q = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 + 4q = 0$$

che insieme alla condizione precedente porta al seguente sistema:

$$\begin{cases} m^2 + 4q = 0 \\ x_0^2 = mx_0 + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = x_0^2 - mx_0 \\ m^2 - 4x_0 m + 4x_0^2 = 0 \end{cases}$$

e risolvendo la seconda equazione nell'incognita m:

$$m = 2x_0 \pm \sqrt{4x_0^2 - 4x_0^2}$$

$$m = 2x_0$$

come volevasi dimostrare.

Riferimenti bibliografici

[1] Davis, M., Hersh, R., *L'Analisi Non-Standard*, *Le Scienze quaderni*, 60, 1991, pp. 52-59 (numero speciale a cura di C. Mangione).

[2] Gilardi, G., *Analisi uno*, McGraw-Hill, Milano, 1991.

[3] Giusti, E., *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1983.

[4] Hurd, A. E., Loeb, P. A., *An introduction to Nonstandard Real Analysis*, Academic Press, Orlando, 1985.

[5] Keisler, H. J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976 (tr. it. di R. Ferro, G. Sambin, L. Colussi, A. Facchini, A. Le Donne, *Elementi di Analisi Matematica*, Piccin Editore, Padova, 1982).

[6] Keisler, H. J., *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976.

[7] Magnani, L., Gennari, R., *Manuale di Logica*, Guerini Scientifica, Milano, 1997.

[8] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, 1964 (tr. it. di T. Pallucchini, *Introduzione alla logica matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1972).

[9] Robinson, A., *Non-Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966.